**Aufgabe 1.** Richtig oder falsch (ohne Begründung)? *(Für jede korrekte Antwort gibt es* 1 *Punkt, jede falsche Antwort gibt* 1 *Punkte Abzug. Die minimale Punktzahl der Aufgabe ist* 0.

1. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 \text{ und } z > 0\} \subset \mathbb{R}^3$ ist eine reguläre Fläche.
2. Sei $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre nach Bogenlänge parametrisierte Kurve von Periode $T > 0$, so dass für die Windungszahl gilt $n_\gamma = -1$. Dann ist $\gamma$ nicht einfach.
3. Sei $S^2_R \subset \mathbb{R}^3$ die Sphäre vom Radius $R$. So gilt für die Gauß-Krümmung $K_R = 1/R^2$.
4. Es gibt eine Triangulierung der Sphäre $S^2$ mit $E = 8$ Ecken, $K = 12$ Kanten und $F = 6$ Flächen.

**Aufgabe 2.** Richtig oder falsch (ohne Begründung)? *(Für jede korrekte Antwort gibt es* 1 *Punkt, jede falsche Antwort gibt* 1 *Punkte Abzug. Die minimale Punktzahl der Aufgabe ist* 0.

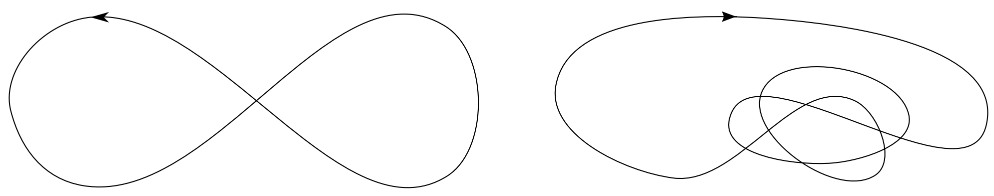
1. $\gamma : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (t^2, t^2)$ ist eine reguläre Kurve.
2. Sei $S = \{(x, y, z) \mid z^2 = x^2 + y^2\}$. So gilt für die Gauß-Krümmung von $S$, dass $K > 0$.
3. Es gibt ein Dreieck $\Delta \subset S^2 = S^2_1$, deren Seiten alle Geodäten sind, so dass alle Winkel $\pi/2$ sind.
4. Es gibt eine Parametrisierung $\varphi$ der Einheitssphäre $S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, so dass für die erste bzw. zweite Fundamentalform gilt:

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$II = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Jedes Vektorfeld auf $S^2$ hat mindestens eine Nullstelle.

**Aufgabe 3. Windungszahl**

1. Sei $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre nach Bogenlänge parametrisierte Kurve von Periode $T > 0$. Man gebe die Definition der Windungszahl $n_\gamma$ von $\gamma$ an.
2. Man bestimme die Windungszahl folgender Kurven, die im Sinne des angezeigten Pfeils durchlaufen werden:



3. Sei $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre nach Bogenlänge parametrisierte Kurve von Periode $T > 0$ und sei $\kappa(t)$ die Krümmung von $\gamma(t)$. Man beweise, dass

$$\int_0^T \kappa(t)dt = 2\pi \cdot n_\gamma.$$

**Aufgabe 4. Windungszahl**

1. Definiere die Windungszahl einer geschlossenen Kurve in $\mathbb{R}^2$
2. Sei $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine geschlossene, reguläre Kurve, so dass

$$\frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Bestimme die Windungszahl von $\gamma$.

**Aufgabe 5. Theorema Egregium**
Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte, reguläre Fläche und $N : S \longrightarrow S^2$ die Gauß-Abbildung.

1. Sei $S = \{(u, v, -u^2 - v^2) \mid u, v \in \mathbb{R}^2\}$ und sei $N$ das Normalenvektorfeld, das in $(0, 0, 0)$ nach oben zeigt. Man bestimme das Bild von $N$.
2. Die *mittlere Krümmung* von $S$ in $p$ ist

$$H_p := -\frac{1}{2}\mathrm{Spur}(DN_p) = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2),$$

wobei $\kappa_1, \kappa_2$ die Hauptkrümmungen in $p$ sind.

Man gebe ein Beispiel an, welches zeigt, dass die mittlere Krümmung nicht nur von der ersten Fundamentalform abhängt.

*Hinweis*: Man betrachte Flächen, deren Gauß-Krümmung verschwindet.

**Aufgabe 6. Orientierung**
Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche.

1. Definiere den Begriff einer Orientierung von $S$.
2. Nehme an, dass es zwei lokale Parametrisierungen $\varphi_0 : U_0 \longrightarrow S$ und $\varphi_1 : U_1 \longrightarrow S$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} &\varphi_0(U_0) \cup \varphi_1(U_1) = S \text{ und} \\ &\varphi_0(U_0) \cap \varphi_1(U_1) \text{ ist wegzusammenhängend.} \end{aligned}$$

Zeige, dass $S$ orientierbar ist.

**Aufgabe 7. Geodäten auf Rotationsflächen**
Sei $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine injektive Kurve die nach Bogenlänge parametrisiert ist. Wir betrachten die reguläre Fläche $S$ mit

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \text{es gibt } t \in \mathbb{R} \text{ so dass } \gamma(t) = (x, y)\}.$$

Man darf ohne Beweis verwenden, dass $S$ eine reguläre Fläche ist.

1. Bestimme ein Normalenvektorfeld von $S$.
2. Zeige, dass die Kurve

$$\begin{aligned} \eta : \mathbb{R} &\longrightarrow S \\ t &\longmapsto (\gamma(t), t) \end{aligned}$$

eine Geodäte auf $S$ ist.

**Aufgabe 8. Isometrien**

1. Sei $S$ eine reguläre Fläche und $\varphi : S \longrightarrow S$ ein Diffeomorphismus. Definiere, wann $\varphi$ eine Isometrie ist.

2. Sei $S$ der Zylinder $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : S &\longrightarrow S \\ (x, y, z) &\longmapsto (\cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y, \sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y, z) \end{aligned}$$

   eine Isometrie von $S$ ist.

**Aufgabe 9. Kovar. Ableitung, parallel**
Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $N$ ein Normalenvektorfeld mit $\|N\| \equiv 1$. Wir fixieren eine glatte Kurve $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow S$ sowie ein Vektorfeld $V : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld entlang $\gamma$.

1. Definieren Sie die kovariante Ableitung von $V$ entlang $\gamma$.

2. Definieren den Begriff *paralleles Vektorfeld entlang einer Kurve* $\gamma$.

3. Zeige, dass für ein paralleles Vektorfeld $V$ entlang $\gamma$ die Länge $\|V(t)\|$ von $V$ konstant ist.

4. Ist die Umkehrung der vorangehenden Aussage wahr? Begründung!

**Aufgabe 10. Geodäten**
Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und sei $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow S$ eine glatte Kurve.

1. Gebe eine Definition an, dass $\gamma$ eine Geodäte ist.

2. Zeige: Ist $\gamma$ eine Geodäte, so ist $\|\dot{\gamma}(t)\|$ konstant.

3. Sei $P = \{(x, y, x^2 + y^2) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Bestimme das Bild der Geodäten in $P$, die durch $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ mit $\dot{\gamma}(0) = (1, 0, 0)$ verläuft.

   *Hinweis:* Man darf folgende Tatsache verwenden: Ist eine Kurve $C$ die Fixpunktmenge einer Isometrie, so ist $C$ das Bild einer Geodäten.

**Aufgabe 11. GB** Wir betrachten den Graphen $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^3$ der Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{x^2 + y^2}{2}. \end{aligned}$$

Sei $R = \Gamma_f \cap \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Bestimme das Integral $\int_R K dA$ (hier ist $K$ die Gauß-Krümmung und $dA$ das infinitesimale Flächenelement) mit Hilfe des Satzes von Gauß-Bonnet.

**Aufgabe 12. Gaußkr in Koord.**
Sei $S$ die durch folgende Parametrisierung gegebene Fläche:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times (0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (\cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sin(v), u). \end{aligned}$$

Berechnen Sie die erste und die zweite Fundamentalform von $S$. Bestimmen Sie die Hauptkrümmungen im Punkt $(1, 1, 0) \in S$.

**Aufgabe 13. Asymptotenlinien** Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche.

1. Definiere die zweite Fundamentalform von $S$.

2. Sei $I$ ein Intervall und $\gamma : I \longrightarrow S$ eine glatte Kurve so dass $II_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)) = 0$ für alle $t \in I$. Zeige, dass $\dot\gamma(t)$ und $\ddot\gamma(t)$ beide in $T_{\gamma(t)}S$ enthalten sind.

3. Man kann die Gaußkrümmung durch die Torison von $\gamma$ (=Asymptotenlinie) ausdrücken.

**Aufgabe 14. Gauß-Abb.** Sei $\varphi : U \longrightarrow (S \cap V)$ eine lokale Parametrisierung von $S$ und $N$ ein Normalenvektorfeld. Wir nehmen an, dass für ein $\varepsilon > 0$ jede der Abbildungen $\varphi_r$ mit $r \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\begin{aligned} \varphi_r : U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longmapsto \varphi(u,v) + rN(\varphi((u,v)) \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus auf sein Bild ist. Dann ist das Bild von $\varphi_r$ eine reguläre Fläche $S_r$.

1. Zeige, dass $T_{\varphi_r(u,v)}S_r = T_{\varphi(u,v)}S$.

2. Sei $N_r$ das Normalenvektorfeld von $\varphi_r(U)$. Begründe $N_r \circ \psi_r = N$ wobei

$$\begin{aligned} \psi_r : \varphi(U) &\longrightarrow \varphi_r(U) \\ p &\longmapsto p + rN(p) \end{aligned}$$

3. Folgere $dN_r = dN \circ (\mathrm{id} + rdN)$ (hier werden Differentiale von Gauß-Abbildungen als Endomorphismen von Tangentialräumen aufgefasst).

4. Berechne die Hauptkrümmungen von $S_r$ aus jenen von $S_0 = \varphi(U)$.

**Aufgabe 15. Jordan**

1. Formuliere den Jordanschen Kurvensatz für die Sphäre $S^2$.

2. Gib eine geschlossene Kurve auf dem Torus $T$ an, deren Komplement in $T$ wegzusammenhängend ist. Die Fläche $T$ ist die regulären Fläche $\varphi(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longmapsto ((2+\cos(v))\cos(u), (2+\cos(v))\sin(u), \sin(v)). \end{aligned}$$

3. Seien $q_1 = (0,3,0)$ und $q_2 = (0,-3,0)$ Punkte auf $T$ und $p_1 = (0,0,1)$ sowie $p_2 = (0,0,-1)$ Punkte auf $S^2$. Zeige, dass $T \setminus \{q_1, q_2\}$ und $S^2 \setminus \{p_1, p_2\}$ nicht homöomorph sind.

**Aufgabe 16. Poincaré Hopf**
Sei $Y : \overline{B_1(0)} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe, so dass

$$Y(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \text{ falls } (x,y) \in \partial B_1(0).$$

Zeige, dass $Y$ Nullstellen im Inneren der Scheibe hat.

**Aufgabe 17. GB**

1. Formuliere den Satz von Gauß-Bonnet.

2. Verifiziere die Aussage für die Teilmenge $R = \{(x,y) \in S \,|\, |x| \le 1 \text{ und } |y| \le 1\}$ der Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ (orientiert durch das Normalenvektorfeld $(0,0,1)^T$).

**Aufgabe 18. GB**

1. Sei $R \subset S$ eine kompakte Teilmenge einer orientierten regulären Fläche mit stückweise glattem Rand. Geben Sie den Satz von Gauß-Bonnet für $R$ an.

2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und sei

$$S = \Gamma_f = \{(u, v, f(u, v)) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$$

der Graph von $f$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $S$ eine reguläre Fläche ist. Man nehme an, dass es eine einfach geschlossene Geodäte
$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow S$ von Periode $T$ gibt. Man zeige: Es gibt einen Punkt $p \in S$ mit $K(p) > 0$.

**Aufgabe 19.** 1. Wir betrachten

$$R = S^2 \cap \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x \leq \frac{3}{4}, y \leq \frac{3}{4}, z \leq \frac{3}{4}\right\} \subset S^2.$$

Berechne die Eulercharakteristik von $R$.

2. Zeige, dass der Abschluss des Komplements von $R$ in $S$ aus drei abgeschlossenen

3. Existiert auf $S^2$ ein Vektorfeld mit isolierten Singularitäten, welches

- keine Singlarität in $R$ hat und
- senkrecht auf $\partial R$ steht?

**Aufgabe 20. GB + Flächeninhalt**
Man betrachte eine Triangulierung der Einheitsspäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ durch gleichseitige geodätische Dreiecke mit Winkel $\alpha$. Man bestimme die möglichen Werte von $\alpha$.

**Aufgabe 21. Triangulierungen**
Man betrachte Zerlegungen von $S^2$ in $k$-Ecke, so dass sich an *jeder Ecke* genau $\ell \geq 3$ Kanten treffen. Bestimme die möglichen Werte von $k$.